

文章编号: 1000-8055(2004)05-0730-05

基于数值的弧齿锥齿轮齿面啮合点 位置分析的拟赫兹法

刘光磊, 方宗德

(西北工业大学 机电学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 在已知弧齿锥齿轮齿面网格的条件下, 分析了单齿啮合时弧齿锥齿轮齿面弹性变形对轮齿啮合点位置的影响。为此, 首先形成一整套刚性齿面啮合点的数值计算方法; 然后, 采用赫兹接触理论计算齿面弹性变形, 确定齿轮轮齿的微小转动及由此引起的啮合点位置的变动。将齿轮因齿面变形而产生微小转角, 继而进行齿面啮合分析的过程定义为拟赫兹接触分析。结果表明, 齿面弹性变形引起的齿轮轮齿的微小转动对啮合点的最终位置有一定的影响。

关键词: 航空、航天推进系统; 弧齿锥齿轮; 拟赫兹接触; 齿面弹性变形; 数值齿面; 弹性接触
中图分类号: TH 132. 41 **文献标识码:** A

Quasi-Hertzian Method Based on Numerical Meshing Points Analysis of Spiral Bevel Gears

L U Guang-lei, FANG Zong-de

(School of Mechatronic Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: With the knowledge of tooth surface meshing grids, the influence of tooth surface elasticity on meshing points was analyzed. First a set of numerical methods for meshing points calculation was developed. Then the elastic deformation of the spiral bevel gears was calculated using Hertzian theory and the change of meshing point due to micro angle shift brought about by the elastic deformation was determined. The micro angle induced by the tooth surface elastic deformation causes the change of meshing points. Quasi-Hertzian analysis is defined as the process of tooth meshing analysis. The results show that the micro rotational angle induced by the tooth surface elastic deformation has definite effect on meshing points.

Key words: aerospace propulsion system; spiral bevel gears; Quasi-Hertzian contact; tooth surface elasticity; digital tooth surface; elastic contact

分析负载作用下的弧齿锥齿轮的齿面啮合迹时, 可以首先确定刚性齿面的啮合点位置, 然后再采用经典弹性力学方法, 对其进行赫兹接触分析, 最后, 依据弹性体的变形量, 确定接触区域中心点

的一系列位置。但是, 经典弹性力学在进行赫兹接触分析时, 是假定外载荷的大小和方向在弹性体变形的过程中始终不变, 两弹性体的初始啮合点与发生最大变形量处一致。然而在理想加载模式

收稿日期: 2003- 09- 25; 修订日期: 2004- 04- 14

作者简介: 刘光磊(1962-), 男, 江西安义人, 西北工业大学机电工程学院副教授, 博士, 主要从事航空动力传动中的关键零部件的振动、噪声和润滑研究

下,从初始啮合点开始到最终处于平衡状态的逐级加载过程中,只有弧齿锥齿轮上的外加扭矩是不变量,轮齿啮合力的大小、方向以及最大变形量的发生点都在发生变化。本文采用经典弹性力学中曲面接触分析的赫兹方法,研究了载荷作用下因弧齿锥齿轮齿面弹性变形而产生的齿轮轮齿转动对齿面啮合点的影响。

1 刚性齿面啮合点的确定方法

本文在已知齿面网格点坐标的前提下,首先解决刚性齿面的啮合点的确定问题,这是进行弹性齿面分析的基础。

为了采用数值方法对齿面进行分析,首先要形成齿面网格点的坐标。齿面网格坐标点是通过采用优化方法,求解描述齿面形状的非线性方程组而得到。这样,齿面可以看成是由离散的空间点所构成。

1.1 齿面网格加密的双三次样条法^[1]

由离散点所构成的曲面,点与点之间的空间距离不变。然而在求解过程中,当求解精度无法满足规定的要求时,有必要将原有网格加密细化。具体方法是:将离散的空间点看成是由两组离散的空间曲线交叉而成,交叉点为结点,并且是非奇点。对其加密细化前,首先,将这两组空间曲线分别用三次样条插值函数^[2]来表示;然后,依据所得到的三次样条插值函数,在原有齿面的点与点之间插入所需的点数即可。这种用三次样条插值函数分别拟合两条空间曲线以间接表达曲面的方法就称为双三次样条法。齿面加密以后的齿面网格结点的分布和编码如图 1 所示。

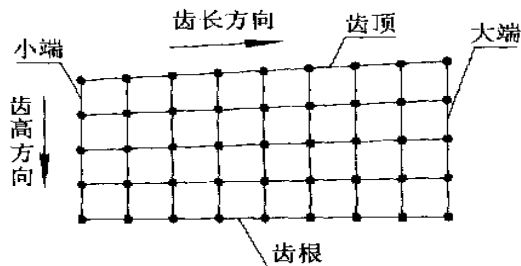


图 1 齿面网格结点分布和编码

Fig 1 Tooth surface grid layout and coding

齿面网格坐标点是相对于齿轮坐标系而言的。为了避免因齿面卷曲而出现的函数多值问题,齿面网格加密细化应在齿面坐标系下进行。最后,将齿面坐标系下网格加密细化的结果再转换回原齿轮坐标系中即可。

1.2 齿面间坐标变换^[3]

弧齿锥齿轮在工作之初,要求两轮齿面基点在空间重合,基点处的齿面法矢平行。但是由于计算误差不可避免,实际的一对弧齿锥齿轮一般并不满足上述要求。在已知描述齿面的离散点坐标时,可以根据两齿轮齿面基点坐标和齿面法矢的指向,通过使一齿轮相对于另一齿轮的平移和旋转而达到上述要求。具体做法是:

(1) 根据两齿轮初始时轴线垂直且重合的条件,如图 2 所示,将齿轮 2 的齿面基点法矢 n_{b2} 变换到齿轮 1 的坐标系 σ_1 中成为 n_{b12} , 如图 3 所示;

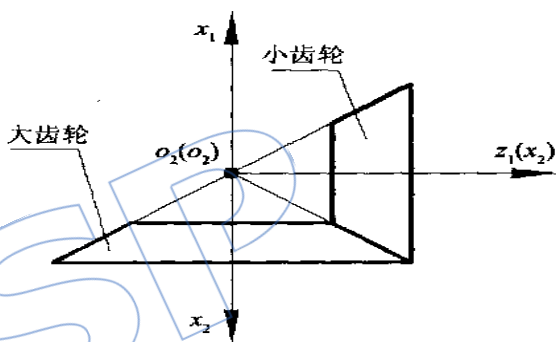


图 2 小齿轮和大齿轮坐标系的相对位置

Fig 2 Relative position between pinion coordinate system and gear coordinate system

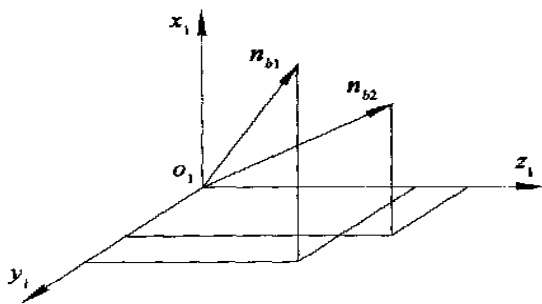


图 3 齿面啮合基点法矢的相对关系

Fig 3 Relative relationship between unit vectors at the tooth surface base point of pinion and gear

(2) 使 n_{b12} 绕 σ_1 的坐标轴 x_1, y_1, z_1 转动 θ, θ, θ , 与齿轮 1 的齿面法矢 n_{b1} 重合;

(3) 使齿轮 2 的坐标系 σ_2 的各坐标轴 x_2, y_2, z_2 也按从 θ, θ 到 θ 同样的顺序到达新的位置;

(4) 最后,考虑到两齿轮初始时的相互关系和齿面基点的位置差,即可以建立两齿轮坐标系的转换矩阵为:

$$M_{\alpha_1-\alpha_2} = \begin{bmatrix} C_x S_y C_z + S_x S_z & S_x S_y C_z - C_x S_z & -C_y C_z & x_{10} \\ C_x S_y C_z - S_x S_z & S_x S_y S_z + C_x C_z & -C_y S_z & y_{10} \\ C_x C_y & S_x C_y & S_y & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$M_{\alpha_2-\alpha_1} = \begin{bmatrix} C_x S_y C_z + S_x S_z & C_x S_y S_z - S_x C_z & C_x C_y & x_{20} \\ S_x S_y C_z - C_x S_z & S_x S_y S_z + C_x C_z & S_x C_y & y_{20} \\ -C_y C_z & -C_y S_z & S_y & z_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $x_{10} = \Delta x$, $y_{10} = \Delta y$, $z_{10} = \Delta z$ 是 α_2 的坐标原点 o_2 在 α_1 中的坐标。

$$x_{20} = - [(C_x S_y C_z + S_x S_z) \cdot x_{10} + (C_x S_y S_z - S_x C_z) \cdot y_{10} + C_x C_y \cdot z_{10}]$$

$$y_{20} = - [(S_x S_y C_z + C_x S_z) \cdot x_{10} + (S_x S_y S_z + C_x C_z) \cdot y_{10} + S_x C_y \cdot z_{10}]$$

$$z_{20} = - (-C_y C_z \cdot x_{10} - C_y S_z \cdot y_{10} + S_y \cdot z_{10})$$

是 α_1 的坐标原点 o_1 在 α_2 中的坐标。

齿面基点重合后, 上述与齿轮固结的坐标系 α_1 和 α_2 就成为描述小齿轮和大齿轮相互关系的固定坐标系 α_{10} 和 α_{20} , 它们不随齿轮转角而发生变化。

1.3 齿面间隙求解的局部坐标法

为了解齿面啮合点, 首先要确定两齿轮齿面之间的间隙。齿面间隙求解可以采用局部坐标法。这一方法是以某一齿轮的齿面为参考坐标系, 求解一齿轮齿面上某一点沿某一坐标方向到另一齿轮齿面间的距离。

比如以齿轮 2 的齿面上的特征点(可在齿面网格的四个角点中任取 3 个)建立一齿面坐标系, 将齿轮 1 的齿面网格坐标点也置于该坐标系中, 通过指定齿轮 2 齿面上的一点, 搜索齿轮 1 齿面上的对应点, 将两点之间的坐标值相减, 即可求出齿面间距。

1.4 最小齿面间隙求解的逐点搜索法

齿面最小间隙的求解, 可以通过计算齿面对应点的间距, 然后从其中找出最小值来实现。这种方法称为全齿面搜索法。但是搜索速度较慢。比较快的计算方法是从小齿面上某点开始, 比如计算基点, 按照某种事先确定的搜索方式, 逐渐找到齿面间隙的最小值。常用的方法有: 逐级细化齿面网格法、交叉搜索法和逐点搜索法。

以上 4 种搜索方法, 除第 1 种方法一定可以找到最小点外, 其它几种搜索方法都有可能搜索至局部最小点。为了有效地防止这种情况的出现, 实际计算时, 将齿面预先分成若干子域, 从每个子域的中点开始搜索, 首先求得每个子域搜索的最小点, 然后取所有子域搜索结果的最小值作为最

终的结果。

试算结果表明比较, 逐点搜索法计算速度最快。本文采用的就是这种搜索方法。

1.5 齿面间隙调整的两点递推迭代法

两齿轮的某一对齿面处于啮合状态时, 啮合点唯一, 齿面啮合点处的公法矢共线。但在数值求解时, 一齿轮的结点一般与另一齿轮的非结点相啮合, 啮合点处的公法矢一般并不重合。这是因为数值计算误差和齿面用微小平面拟和所造成的。在实际计算中, 只要齿面没有产生曲率干涉, 即可认为齿面啮合时法矢共线。

齿面啮合点的求解可以采用两点递推迭代法。该方法根据一齿轮相对于另一齿轮的 2 个转角 Φ 和 Φ_{i+1} 及其对应的齿面间隙 Δz_i 和 Δz_{i+1} , 求解下一位置的齿轮转角 Φ_{i+2} 和齿面间隙 Δz_{i+2} :

$$\Phi_{i+2} = \Phi_{i+1} + \gamma \times$$

$$(\Phi_{i+1} - \Phi) / (\Delta z_i - \Delta z_{i+1}) \times \Delta z_{i+1} \quad (3)$$

式中: γ 为松弛因子。如果齿面间隙 Δz_{i+2} 使下式成立:

$$\Delta z_{i+2} \leq \epsilon \quad (4)$$

则啮合点找到。 ϵ 的具体数值根据计算确定。如果要求计算精度很高, 有可能因为 ϵ 数值太小而导致无法收敛。

2 拟赫兹接触问题的基本原理

2.1 赫兹接触问题的基本原理^[4]

赫兹假设两弹性点接触时, 接触点处的几何形状可用 2 个二阶曲面来逼近, 通过把两弹性体的接触问题等效为一个当量弹性体和一个刚性平面的接触, 求得接触区的大小和接触应力分布。

2.2 拟赫兹接触问题的计算原理

在赫兹分析中,有以下 3 点假设: (1) 初始啮合点就是最大变形量发生处; (2) 外载荷沿接触点的法线方向,且在弹性体变形过程中大小和方向都不变; (3) 椭圆接触区的椭圆率不变。但是在弧齿锥齿轮中,因齿面弹性变形而引起的齿轮轮齿的微小转动,使得以上 3 条假设均不成立。因此有必要形成外载荷作用下弧齿锥齿轮齿面啮合点求解的数值方法。这种计入齿面弹性而导致的接触区中最大变形量位置发生变化的数值计算方法,称为拟赫兹方法。

2.3 拟赫兹接触问题求解方法研究

弧齿锥齿轮在外载荷作用下,初始啮合点处会产生弹性变形,包括弯曲变形和接触变形。这一变形会导致齿轮发生微小的相对转动,从而引起接触区中心的改变。接触区中心的改变又引起轮齿啮合力变化,并导致弯曲变形和接触变形与前述结果不同。最终的稳定状态,一般只有通过迭代计算才能得到。在计算过程中,为了显示齿面弹性变形对齿面啮合点位置变动的影响,暂时不计入轮齿的弯曲变形。

为此,在计算因齿面弹性而引起的齿轮转动时,可以视轮齿为刚性。在此假设条件下,齿轮转动所产生的刚性齿面干涉量与两齿面的接触弹性变形量之和 δ 相等。

设小轮 1 在外扭矩 T_a 的作用下相对于大轮 2 转动,两齿面 S_1 和 S_2 于 C 点接触, C 点到小轮回转轴线的距离为 r_c ,轮齿啮合力 F 与齿面 S_1 上 C 点处的法线 n_c 平行。视轮齿啮合力所产生的绕小轮 1 的轴线的扭矩与外扭矩 T_a 的相对误差:

$$\Delta T = \frac{T_a - (F \times r_c)}{T_a} \quad (5)$$

为小轮 1 转角的函数。将齿面递增压入法和两点递推迭代法相结合,可以求得最大变形量在齿面上的位置 C_0 。具体如下:

(1) 令小轮 1 转动一个微小的角度 $\Delta\varphi_c$, 计算齿面最大干涉量 δ 和相应干涉点 C_0' 。

(2) 视 C_0' 为初始啮合点,根据 δ 计算轮齿啮合力 F' 。为此视 δ 为齿面弹性变形,则相应的轮齿啮合力 F 可按如下步骤计算:

① 将齿面 S_1 和齿面 S_2 的网格结点坐标 $P_1\{x_1, y_1, z_1, 1\}$ 和 $P_2\{x_2, y_2, z_2, 1\}$, 置于以接触点 C 为原点,接触面 S_1 和 S_2 的公切面为坐标平面,主方向和啮合点法线方向为坐标轴方向而建立的,

用于描述间隙曲面的坐标系 α 中,成为 $P_{1c}\{x_{1c}, y_{1c}, z_{1c}, 1\}$ 和 $P_{2c}\{x_{2c}, y_{2c}, z_{2c}, 1\}$ 。

$$\left. \begin{aligned} P_{1c} &= M_{\sigma_2\sigma_2} M_{\sigma_2\sigma_{20}} M_{\sigma_2\sigma_{10}} M_{\sigma_{10}\sigma_1} P_1 \\ P_{2c} &= M_{\sigma_2\sigma_2} P_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $M_{\sigma_2\sigma_2}, M_{\sigma_2\sigma_{20}}, M_{\sigma_2\sigma_{10}}, M_{\sigma_{10}\sigma_1}$ 和 $M_{\sigma_2\sigma_2}$ 是坐标变换矩阵; σ_{10} 和 σ_{20} 是确定小轮和大轮相对位置固定坐标系, σ_1 和 σ_2 是与齿轮固结并随同齿轮转动的用于表达齿面形状的坐标系。

② 以 C_0' 为中心,在 S_2 上选取 3 个点,计算 S_1 和 S_2 沿 n_c 的齿面间隙,并根据赫兹理论,计算出与 δ 对应的轮齿啮合力 F' 。

(3) 根据所得的轮齿啮合力 F 计算相应的扭矩 T' ,并形成判别式:

$$\frac{T_a - T'}{T_a} < \epsilon_r \quad (7)$$

ϵ_r 为预先给定的收敛指标。若 (7) 式不能成立,则逐渐增加 $\Delta\varphi_c$,直至 $T' - T_a > 0$ 。然后,采用两点递推法相应调整小轮 1 转角 $\Delta\varphi_c$,最终达到稳态解 $\Delta\varphi_c\delta$ 即为所求。

上面求得的与 δ 相对应的齿面接触点 C_c ,就是计入齿面弹性变形时,齿面上新的啮合点位置。

3 算例与结论

本文以航空发动机传动系统中的一对弧齿锥齿轮为例,在计算机上仿真。齿轮参数有:轴交角 $\Sigma = 90^\circ$; 齿轮的模数 $m = 3 \text{ mm}$, 压力角 $\alpha = 20^\circ$; 螺旋角 $\beta = 35^\circ$; 齿宽 $b = 20 \text{ mm}$, 小齿轮齿数 $z_1 = 47$, 右旋, 大齿轮齿数 $z_2 = 53$, 左旋。两齿轮齿面网格分化成 241×57 , 沿齿长 m_x 和齿高 n_y 方向的网格间距大约等于 0.1 mm 。齿长方向的网格结点编号从轮齿小端到轮齿大端, 齿高方向从齿顶到齿根。两齿轮在初始安装位置时齿面基点重合, 啮合点应为 (121, 29)。

计算结果如图 4 和图 5 所示。从图 4、图 5 中可以看出: 以齿面基点作为啮合点, 观察该点随外扭矩的增加而发生变动的情况。

计算结果表明, 随着外加扭矩的增加, 啮合点沿齿长方向向小端移动, 沿齿高方向向齿根移动。当外加作用扭矩在 $1 \times 10^5 \sim 8 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 范围内变化时, 啮合基点沿齿长方向向小端的移动量约为 0.45 mm , 向齿根方向的移动量约为 0.1 mm 较小。啮合基点向小端移动一般认为会降低齿轮轮齿的接触强度和弯曲强度。

需要说明的是, 上述结论不具有一般性。换句

话说, 一对弧齿锥齿轮传动, 其齿面啮合基点因齿面弹性变形而产生的移动, 不论是移动方向还是移动量, 只能在齿轮的齿面形成以后, 采用上述数

值分析方法才能确定。

在弧齿锥齿轮齿面设计时, 假设齿面是刚性的, 不考虑齿面弹性变形的影响, 因而也无法分析齿面弹性变形对啮合点和啮合区域的变动影响。从本文的分析可见, 采用拟赫兹接触法时, 齿面弹性变形会影响齿面的啮合点的位置。在齿轮受载状态下, 正确估计啮合点的位置, 并相应确定啮合区的位置及形状, 对于准确估计弧齿锥齿轮的接触性能是很有意义的。

参考文献

[1] 刘光磊, 沈允文, 王三民 弧齿锥齿轮齿面网格加密的双三次样条法[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(增刊): 128- 129

[2] 刘光磊, 沈允文, 王三民 刚支时弧齿锥齿轮齿面啮合迹的确定[J]. 机械科学与技术, 2001, 20(3): 392- 394

[3] 刘光磊, 沈允文, 王三民 轮齿啮合力变化弧齿锥齿轮齿面啮合迹的确定[R]. 北京: 第一届国际机械工程学术会议, 2000

[4] 邓建中, 葛仁杰, 程正兴 计算方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1985

[5] 铁摩辛柯·古地尔著 弹性力学[M]. 徐芝纶译 北京: 高等教育出版社, 1990

[6] 郑昌启 弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮: 啮合原理、齿坯设计、加工调整和齿面分析计算原理[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1986

[7] 吴鸿业主编 齿轮啮合原理[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1979

[8] 郑咸仪 数值计算方法与 FORTRAN 语言[M]. 北京: 电子工业出版社, 1986

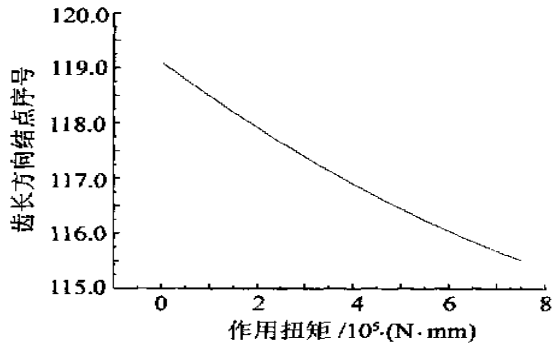


图 4 啮合点沿齿长的变化

Fig 4 Meshing point variation along tooth length

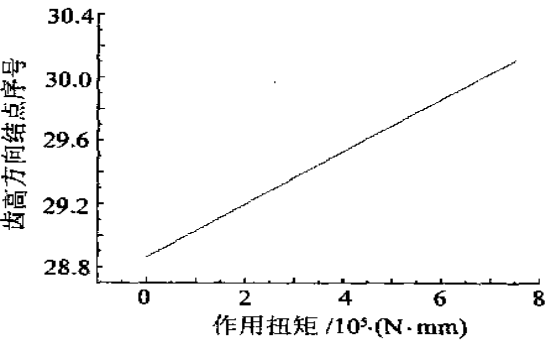


图 5 啮合点沿齿高的变化

Fig 5 Meshing point variation along tooth height